Corrigé Examen National Maths Sciences Maths A et B 2025 Rattrapage

2ème année Baccalauréat - Sciences Maths

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

EXERCICE 1 : (7.75 points)

Partie I

1)

a) **Étudier la continuité de f à droite en 0**

Corrigé :

On utilise la limite usuelle :

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue à droite en } 0.}$

b) **Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \ln x}{x^2+1}$$

On utilise les limites usuelles :

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{0}{1} = 0$$

$\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et}}$

Interprétation graphique : La courbe (C) admet une demi-tangente horizontale a droit en point $(0,0)$.

c) **Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter**

Corrigé :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+1/x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+\frac{1}{x}} = 0$$

$\boxed{\text{La courbe } (C) \text{ admet une branche parabolique de direction } (Ox) \text{ en } +\infty}$

2)

a) **Dresser le tableau de variations de φ**

Corrigé :

$\varphi(x) = x^2 + 1 + 2\ln x$

Dérivée :

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0 \quad \forall x > 0$$

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) **Montrer que $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \left]\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$**

Corrigé :

Calculons :

$$\varphi(1/2) = \frac{1}{4} + 1 + 2\ln(1/2) \approx 1.25 - 1.4 = -0.15 < 0$$

$$\varphi(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{3} + 1 + 2\ln(1/\sqrt{3}) \approx 1.33 - 1.1 = 0.23 > 0$$

D'après le TVI et puisque f strictement croissante :

$$\boxed{\exists! \beta \in \left]\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\text{ tel que } \varphi(\beta) = 0}$$

c) **Montrer que $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$**

Corrigé :

Comme $\varphi(\beta) = 0$:

$$\beta^2 + 1 + 2\ln\beta = 0 \Rightarrow \ln\beta = -\frac{\beta^2+1}{2}$$

Donc :

$$f(\beta) = \frac{\beta^2 \ln\beta}{\beta^2+1} = \frac{\beta^2\left(-\frac{\beta^2+1}{2}\right)}{\beta^2+1} = -\frac{\beta^2}{2}$$

$$\boxed{f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}}$$

3)

a) **Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$**

Corrigé :

On a : $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x^2+1}$ et le quotion de deux fonctions derivable sur $]0; +\infty[$, donc il est derivable sur $]0; +\infty[$, et :

$$f'(x) = \frac{(2x\ln x + x)(x^2+1) - x^2\ln x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x[(x^2+1)(2\ln x + 1) - 2x^2\ln x]}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x[x^2 + 1 + 2\ln x]}{(x^2+1)^2} = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}}$$

b) **Donner le tableau de variations de f**

Corrigé :

Signe de $f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$:

φ s'annule en β et est négative avant, positive après

Le dénominateur est toujours positif

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\beta^2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) **Montrer que $\dfrac{1}{\beta}$ est l'unique solution de $f(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $]\beta;+\infty[$**

Corrigé :

On vérifie :

$$f(1/\beta) = \frac{(1/\beta)^2\ln(1/\beta)}{(1/\beta)^2+1} = \frac{-\ln\beta}{\beta^2+1} = \frac{-\ln\beta}{\beta^2+1}$$

Or $\varphi(\beta) = 0 \Rightarrow \ln\beta = -\dfrac{\beta^2+1}{2}$ donc :

$$f(1/\beta) = \frac{-\left(-\frac{\beta^2+1}{2}\right)}{\beta^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\beta} \text{ est bien solution de } f(x) = \frac{1}{2}}$$

d) **Montrer que $y = \beta x - \dfrac{1}{2}$ est la tangente à (C) en $x = \dfrac{1}{\beta}$**

Corrigé :

On a :

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$$

On a :

$$f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$$

Donc :

$$f'\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta}\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}+1\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1 + 2\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\beta^2} + 1 - 2\ln\beta \\
&= \frac{1}{\beta^2} + 1 + (\beta^2+1) \quad \text{car } \varphi(\beta) = 0 \Rightarrow \ln\beta = -\frac{\beta^2+1}{2} \\
&= \frac{1}{\beta^2} + \beta^2 + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}+\beta^2+2\right)}{\left(\frac{1+\beta^2}{\beta^2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{\beta^3}+\beta+\frac{2}{\beta}}{\frac{(1+\beta^2)^2}{\beta^4}} \\
&= \left(\frac{1+\beta^4+2\beta^2}{\beta^3}\right)\times\frac{\beta^4}{(1+\beta^2)^2} \\
&= \frac{\beta(1+\beta^4+2\beta^2)}{(1+\beta^2)^2} \\
&= \frac{\beta(1+\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^2} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

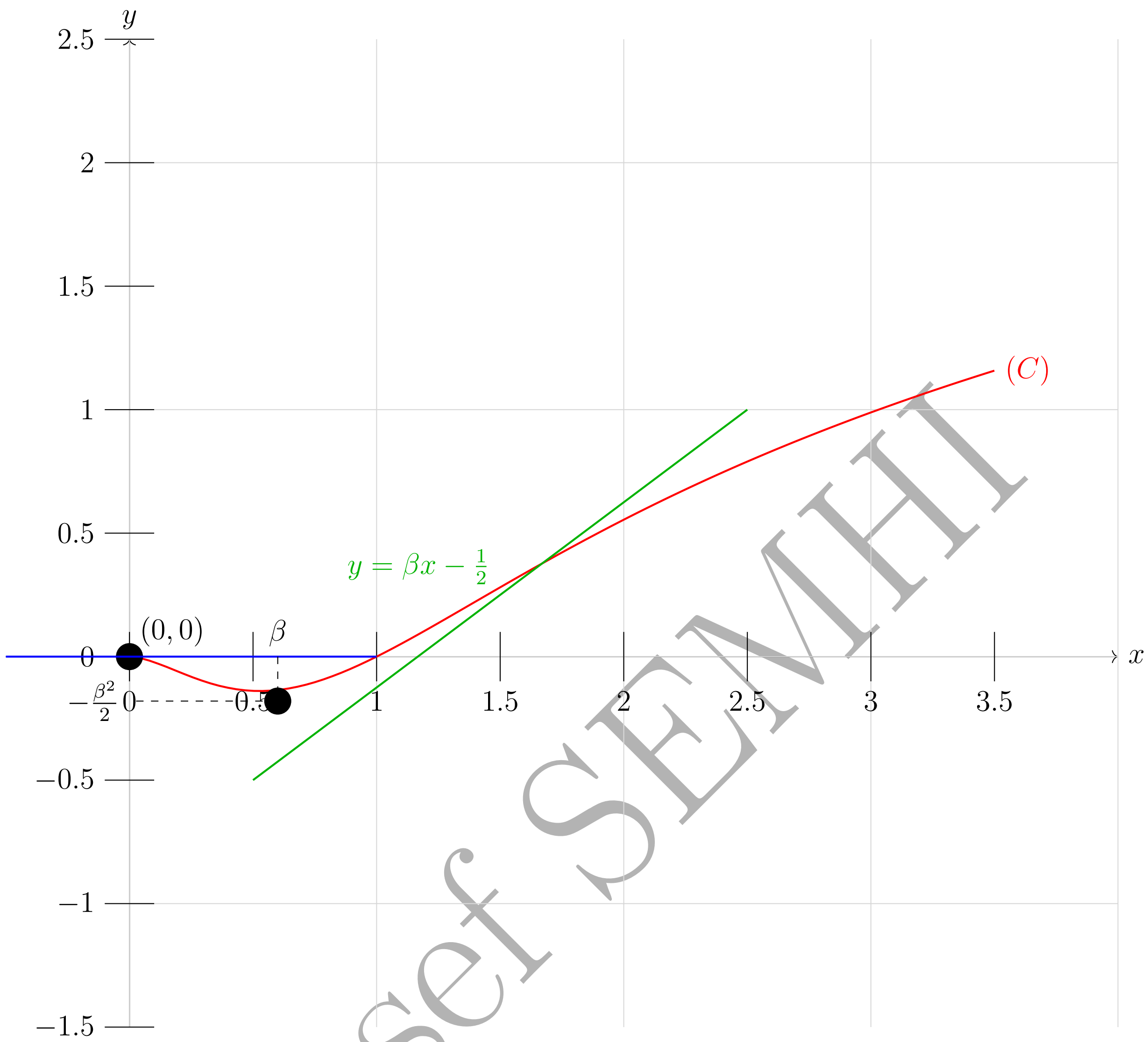
Équation de la tangente :

$$\begin{aligned}
y &= f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)+f\left(\frac{1}{\beta}\right) \\
&= \beta\left(x-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{2} \\
&= \beta x-1+\frac{1}{2} \\
&= \beta x-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La droite } y=\beta x-\frac{1}{2} \text{ est bien la tangente à } (C) \text{ en } x=\frac{1}{\beta}}$$

4)

Représentation graphique



Partie II

1)

a) **Étudier les variations de g**

Corrigé :

La fonction est $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$.

Dérivée :

$$g'(x) = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \times \left(-\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^3} < 0 \quad \forall x > 0$$

$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]0; +\infty[}$

b) **Montrer que : $\forall x \in J$, $\sqrt{3} < g(x) < 2$**

Corrigé :

Pour $x \in J = [\sqrt{3}; 2]$:

En $x = \sqrt{3}$:

$$g(\sqrt{3}) = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)} = e^{\frac{2}{3}} \approx 1.95$$

En $x = 2$:

$$g(2) = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)} = e^{\frac{5}{8}} \approx 1.87$$

Donc :

$$\sqrt{3} \approx 1.73 < 1.87 \leq g(x) \leq 1.95 < 2$$

$$\boxed{\forall x \in J, \sqrt{3} < g(x) < 2}$$

2)

a) **En utilisant le résultat de la question I.3-c), montrer que $g(\alpha) = \alpha$**

Corrigé :

On a $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$. Dans la question I.3-c), on a montré que :

$$\ln(\beta) = -\frac{\beta^2+1}{2} \Rightarrow \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\beta^2+1}{2}$$

D'autre part, $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

Donc :

$$g(\alpha) = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)} \quad \text{et} \quad \ln(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right) \Rightarrow g(\alpha) = e^{\ln(\alpha)} = \alpha$$

$$\boxed{g(\alpha) = \alpha}$$

b) **Montrer que :** $\forall x \in J$, $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Corrigé :

On a :

$$g(x) = e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \Rightarrow g'(x) = -\frac{g(x)}{x^3} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{g(x)}{x^3}$$

Sur $J = [\sqrt{3}, 2]$, x^3 est croissante et $g(x)$ est décroissante, donc $|g'(x)|$ est maximale pour $x = \sqrt{3}$:

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{car } g(x) \leq 2$$

$$\boxed{\forall x \in J, \quad |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

c) **En déduire que :** $\forall x \in J$, $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$

Corrigé :

Par le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x, \alpha[$ tel que :

$$g(x) - g(\alpha) = g'(c)(x-\alpha) \Rightarrow |g(x) - \alpha| = |g'(c)||x - \alpha|$$

D'après la question précédente, $|g'(c)| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|}$$

3)

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

a) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in J$

Corrigé :

Initialisation : $x_0 = \dfrac{7}{4} = 1.75 \in [\sqrt{3}, 2] = J$

Hérédité : supposons $x_n \in J \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n) \in J$ car $g(J) \subset J$

Donc par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in J}$$

b) **Montrer par récurrence que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$

Corrigé :

Initialisation $n = 0$:

$$|x_0 - \alpha| = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^0 |x_0 - \alpha| \quad \text{vrai}$$

Hérédité : supposons qu'il est vraie pou un n, alors :

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x_n - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|$$

Donc par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|}$$

c) **En déduire que la suite (x_n) converge vers α**

Corrigé :

On a :

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha| \to 0 \quad \text{car } \frac{2}{3\sqrt{3}} < 1$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha}$$

EXERCICE 2 : (2.25 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) **Montrer que pour tout entier $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a :**

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Corrigé :

La fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi, si $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, alors :

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

b) **En déduire que :**

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}, \quad \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)\, dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Corrigé :

Puisque ln est croissante sur $[k/n, (k+1)/n]$, elle est bornée sur cet intervalle par ses valeurs aux extrémités. Donc :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

En intégrant cette inégalité sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on obtient :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{k}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx$$

Or :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

2.

a) **Montrer que :**

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

Corrigé :
En sommant les inégalités précédentes de $k = 1$ à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx$$

De même :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)}$$

b) **En déduire que :**

$$\forall n \geq 2, \quad u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Corrigé :
D'apres la question 2.a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

Par définition :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\boxed{u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)}$$

c) **Montrer que :**

$$\forall n \geq 2, \quad -1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Corrigé :

On a :

$$u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx = [x \ln x - x]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx = (1 \cdot \ln 1 - 1) - \left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = -1 - \left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Puis en combinant avec l'encadrement :

$$u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$u_n \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx - \left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(-1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n}$$

Finalement :

$$\boxed{-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$$

d) **Déterminer** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Corrigé :
On a :

$$-1 + \frac{1}{n} \to -1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} \to 0 \Rightarrow -1 + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) \to -1$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$$

EXERCICE 3 : (3.5 points)

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z :

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

1-a) **Vérifier que :**

$$(E_\theta) \iff \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$$

Corrigé :
On a :

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{2i\theta} = 0$$

$$\begin{aligned} z^2 + (1-i)e^{i\theta}z &= ie^{2i\theta} \\ 4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z &= 4ie^{2i\theta} \\ (2z)^2 + 2\cdot 2z\cdot(1-i)e^{i\theta} &= 4ie^{2i\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2z)^2 + 2\cdot 2z\cdot(1-i)e^{i\theta} &= 4ie^{2i\theta} \\
(2z)^2 + 2\cdot 2z\cdot(1-i)e^{i\theta} + (1-i)^2e^{2i\theta} &= 4ie^{2i\theta} + (1-i)^2e^{2i\theta} \\
(2z+(1-i)e^{i\theta})^2 &= (1-i)^2e^{2i\theta} + 4ie^{2i\theta} \\
&= (-2i)e^{2i\theta} + 4ie^{2i\theta} \\
&= 2ie^{2i\theta} \\
&= (1+i)^2e^{2i\theta} \quad \text{car } (1+i)^2 = 2i
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(2z+(1-i)e^{i\theta})^2 = ((1+i)e^{i\theta})^2}$$

b) **En déduire les deux solutions z_1 et z_2 avec $\mathrm{Im}(z_1) \leq 0$**

Corrigé :

De l'équation précédente, on a :

$$2z + (1-i)e^{i\theta} = \pm(1+i)e^{i\theta} \Rightarrow z = \frac{1}{2}\left[\pm(1+i)e^{i\theta} - (1-i)e^{i\theta}\right]$$

$$\boxed{z_1 = -e^{i\theta}, \quad z_2 = ie^{i\theta}}$$

c) **Montrer que :**

$$\frac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Corrigé :

On a :

$$\frac{z_1+1}{z_2+i} = \frac{-e^{i\theta}+1}{ie^{i\theta}+i} = \frac{1-e^{i\theta}}{i(1+e^{i\theta})}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $1+e^{i\theta}$:

$$\frac{1-e^{i\theta}}{i(1+e^{i\theta})} = \frac{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{i(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} = \frac{1-e^{i\theta}-e^{-i\theta}+1}{i\,(1-e^{-2i\theta})}$$

En utilisant les formules trigonométriques :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \Rightarrow \quad 1-e^{i\theta} = 1-\cos\theta - i\sin\theta$$

$$1+e^{i\theta} = 1+\cos\theta + i\sin\theta$$

Donc,

$$\frac{1-e^{i\theta}}{i(1+e^{i\theta})} = \frac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{i(1+\cos\theta+i\sin\theta)}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

On obtient :

$$= \frac{(1-\cos\theta-i\sin\theta)(1+\cos\theta-i\sin\theta)}{i[(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta]}$$

Développons le numérateur :

$$(1-\cos\theta-i\sin\theta)(1+\cos\theta-i\sin\theta) = (1-\cos^2\theta - 2i\sin\theta + i^2\sin^2\theta)$$

$$(1-\cos\theta-i\sin\theta)(1+\cos\theta-i\sin\theta)=(\sin^2\theta-2i\sin\theta-\sin^2\theta)=-2i\sin\theta$$

Et le dénominateur :

$$i[(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta]=i[1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta]=i[2(1+\cos\theta)]$$

Donc :

$$\frac{z_1+1}{z_2+i}=\frac{-2i\sin\theta}{i\cdot 2(1+\cos\theta)}=\frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

Enfin, on utilise la transformation :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\Rightarrow\frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}=-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{z_1+1}{z_2+i}=-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

d) **En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}$**

Corrigé :

$$\begin{aligned}\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}&=\frac{-e^{i\theta}+i\cdot ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}+i}\\&=\frac{-e^{i\theta}-e^{i\theta}}{i(e^{i\theta}+1)}\\&=\frac{-2e^{i\theta}}{i(e^{i\theta}+1)}\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}e^{i\theta}+1&=e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right)\\&=e^{i\theta/2}\cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{-2e^{i\theta}}{i\cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}}&=\frac{-e^{i\theta/2}}{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\&=\frac{-1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{e^{i\theta/2}}{e^{i\pi/2}}\\&=-\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}=-\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\exp\left(i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Partie II

Dans le plan complexe P, on a :

$$a = e^{i\theta}, \quad b = (1+i)e^{i\theta}, \quad c = b - a$$

Soit $q = me^{i\theta}$

1) a) **Déterminer l'affixe p de P image de Q par la rotation R**

Corrigé :

Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O :

$$p = q \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = me^{i\theta} \cdot i = ime^{i\theta}$$

b) **Vérifier que $R(A) = C$**

Corrigé :

$a = e^{i\theta} \Rightarrow R(a) = ia = ie^{i\theta} = (1+i)e^{i\theta} - e^{i\theta} = b - a = c$

$$\boxed{R(a) = c}$$

2) On considère le point H d'affixe $h = \dfrac{m}{m-i}e^{i\theta}$

a) **Montrer que : $\dfrac{p-a}{h} = \dfrac{m^2+1}{m}i$ et $\dfrac{h-a}{p-a} = \dfrac{1}{m^2+1}$**

Corrigé :

On a :

$$a = e^{i\theta}, \quad p = iq = ime^{i\theta}, \quad h = \frac{m}{m-i}e^{i\theta}$$

Alors :

$$p - a = ime^{i\theta} - e^{i\theta} = e^{i\theta}(im-1)$$

$$\frac{p-a}{h} = \frac{e^{i\theta}(im-1)}{\frac{m}{m-i}e^{i\theta}} = \frac{im-1}{\frac{m}{m-i}} = \left(\frac{im-1}{m}\right)(m-i)$$

Donc :

$$\left(\frac{im-1}{m}\right)(m-i) = \frac{(im-1)(m-i)}{m}$$

Calcul du numérateur :

$$(im-1)(m-i) = im^2 - i^2m - m + i = im^2 + m - m + i = i(m^2+1)$$

Ainsi :

$$\frac{p-a}{h} = \frac{i(m^2+1)}{m} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m}i}$$

Et :

$$\frac{h-a}{p-a} = \frac{\frac{m}{m-i}e^{i\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(im-1)} = \frac{e^{i\theta}\left(\frac{m-(m-i)}{m-i}\right)}{e^{i\theta}(im-1)} = \frac{e^{i\theta} \cdot \frac{i}{m-i}}{e^{i\theta}(im-1)} = \frac{i}{(m-i)(im-1)}$$

Calculons ce dénominateur :

$(m-i)(im-1) = m\cdot im - m\cdot 1 - i\cdot im + i\cdot 1 = im^2 - m - i^2m + i = im^2 - m + m + i = i(m^2+1)$

Donc :

$$\frac{h-a}{p-a} = \frac{i}{i(m^2+1)} = \boxed{\frac{1}{m^2+1}}$$

b) **En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP)**

Corrigé :

On a :

$$\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m}i \quad \text{et} \quad \frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$$

Ces égalités impliquent que $\frac{h-a}{p-a} \in \mathbb{R}$: donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires, i.e. $H \in (AP)$.
De plus, $\frac{p-a}{h} \in i\mathbb{R}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont orthogonaux.
Donc H est le projeté orthogonal de O sur la droite (AP).

$$\boxed{H \text{ est le projeté orthogonal de } O \text{ sur } (AP)}$$

c) **Montrer que : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$**

Corrigé :

On a :

$$b = (1+i)e^{i\theta}, \quad q = me^{i\theta}, \quad h = \frac{m}{m-i}e^{i\theta}$$

On factorise $e^{i\theta}$ dans le quotient :

$$\frac{b-h}{q-h} = \frac{(1+i-\frac{m}{m-i})e^{i\theta}}{(m-\frac{m}{m-i})e^{i\theta}} = \frac{(1+i)-\frac{m}{m-i}}{m-\frac{m}{m-i}}$$

Mettons les deux expressions au même dénominateur :

$$\text{Numérateur : } (1+i) - \frac{m}{m-i} = \frac{(1+i)(m-i)-m}{m-i}$$

Développons :

$$(1+i)(m-i) = m + im - i - i^2 = m + im - i + 1 = (m+1) + i(m-1)$$

Donc le numérateur :

$$= \frac{1+i(m-1)}{m-i}$$

Dénominateur :

$$m - \frac{m}{m-i} = \frac{m(m-i)-m}{m-i} = \frac{m^2-im-m}{m-i} = \frac{m(m-1-i)}{m-i}$$

Ainsi :

$$\frac{b-h}{q-h} = \frac{1+i(m-1)}{m(m-1-i)}$$

Donc :

$$\frac{1+i(m-1)}{m(m-1-i)} = \frac{[1+i(m-1)](m-1+i)}{m[(m-1-i)(m-1+i)]}$$

Calcul du numérateur :

$$[1+i(m-1)](m-1+i) = i(m^2-2m+2)$$

Calcul du dénominateur :

$$m[(m-1)^2+1] = m(m^2-2m+2)$$

On obtient donc :

$$\frac{b-h}{q-h} = \frac{i(m^2-2m+2)}{m(m^2-2m+2)} = \frac{i}{m}$$

$$\boxed{\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i}$$

d) **En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires**
Corrigé :

On a montré que :

$$\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i \in i\mathbb{R}$$

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{HQ}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux.
Donc :

$$\boxed{(QH) \perp (HB)}$$

e) **Montrer que les points A, Q, H, B sont cocycliques**
Corrigé :

On utilise la proprieté suivant :

$$A, Q, H, B \text{ sont cocycliques} \iff \frac{b-q}{b-a} \cdot \frac{h-a}{h-q} \in \mathbb{R}$$

On a :

$$\frac{b-q}{b-a} = \frac{1+i-m}{i}, \quad \frac{h-a}{h-q} = \frac{i}{m(1-m+i)}$$

Donc :

$$\frac{b-q}{b-a} \cdot \frac{h-a}{h-q} = \frac{1+i-m}{m(1-m+i)}$$

Posons $z = 1-m+i$, alors :

$$\frac{b-q}{b-a} \cdot \frac{h-a}{h-q} = \frac{1+i-m}{mz}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $\overline{z} = 1 - m - i$:

$$\frac{b-q}{b-a} \cdot \frac{h-a}{h-q} = \frac{1+i-m}{mz} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{(1+i-m)(1-m-i)}{m|z|^2}$$

Or :

$$(1+i-m)(1-m-i) = [(1-m)+i][(1-m)-i] = (1-m)^2 + 1$$

et

$$|z|^2 = |1-m+i|^2 = (1-m)^2 + 1$$

Donc :

$$\frac{b-q}{b-a} \cdot \frac{h-a}{h-q} = \frac{(1-m)^2+1}{m[(1-m)^2+1]} = \frac{1}{m} \in \mathbb{R}$$

Conclusion :

$$\boxed{A, Q, H, B \text{ sont cocycliques}}$$

Exercice 4 : (3.5 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$(E) : y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$$

où a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant :

$$a \wedge b = c \wedge d = 1$$

1. **On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0)**

   a) **Montrer que : $d \mid bc$**

   Corrigé :
   L'équation (E) admet une solution entière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donc :

   $$y_0 = \frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{d}$$

   Donc :

   $$\frac{a}{b}x_0 - y_0 = \frac{c}{d}$$

   $$\Rightarrow \frac{ax_0 - by_0}{b} = \frac{c}{d}$$

   $$\Rightarrow \frac{d(ax_0 - by_0)}{bd} = \frac{bc}{bd} \Rightarrow d(ax_0 - by_0) = bc \Rightarrow d \mid bc$$

   b) **En déduire que : $d \mid b$**

   Corrigé :
   On sait que $\gcd(c, d) = 1$, et comme $d \mid bc$:
   Donc par théorème de Gauss $d \mid b$.

2. **On suppose que $d \mid b$ et on pose : $b = nd$ où $n \in \mathbb{N}^*$**

a) **Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$**

Corrigé :
Comme $\gcd(dn, -a) = 1$ (car $\gcd(a, b) = 1$ et $b = dn$) donc $\gcd(-a, dn) = 1$ et $b = dn$), d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que :

$$dnu + (-a)v = 1$$
$$dnu - av = 1$$

b) **En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :**

$$S = \{(-vcn + bk\,;\, -ucn + ak) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Corrigé :
On cherche $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que :

$$y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}x - y = \frac{c}{d} \Rightarrow ax - by = \frac{bc}{d}$$

Or $b = nd$, donc :

$$ax - ndy = nc$$

Donc :

$$ax - ndy = nc$$

On a une solution particulière donnée par :

$$x_0 = -vcn, \quad y_0 = -ucn$$

(car $dnu - av = 1$, donc on multiplie par cn).
L'ensemble des solutions générales s'écrit alors :

$$x = x_0 + bk = -vcn + bk, \quad y = y_0 + ak = -ucn + ak, \quad k \in \mathbb{Z}$$

D'où :

$$S = \{(-vcn + bk; -ucn + ak) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

3. **Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :**

$$(F) : y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$$

Corrigé :
On nous donne : $2975 = 119 \times 25$, donc :

$$b = 2975 = 119 \cdot 25, \quad d = 119, \quad a = 3, \quad c = 2 \Rightarrow b = d \cdot 25 \Rightarrow n = 25$$

On doit résoudre $dnu - av = 1$:

$$119 \cdot 25u - 3v = 1 \Rightarrow 2975u - 3v = 1$$

Utilisons l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver une solution :

$$\gcd(2975, 3) = 1 \Rightarrow (u, v) = (-1, -992) \quad \text{car } 2975 \cdot (-1) - 3 \cdot (-992) = 1$$

On a donc une solution particulière :

$$x_0 = -vcn = 992 \cdot 2 \cdot 25 = 49600$$
$$y_0 = -ucn = 1 \cdot 2 \cdot 25 = 50$$

L'ensemble des solutions est :

$$S = \{(49600 + 2975k\,;\, 50 + 3k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 5 : (3.5 points)

Partie I

1- a) Vérifier que : $(1-i)*(3+2i) = -2+i$

Corrigé :

On a :

$$\begin{aligned}(1-i)*(3+2i) &= (1+(-1)^{-1}\cdot 3)+(-1+2)i\\ &= (1+(-1)\cdot 3)+(1)i\\ &= (1-3)+i\\ &= -2+i\end{aligned}$$

b) Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans E

Corrigé :

On a :

$$(1-i)*(3+2i) = -2+i$$

Donc :

$$\begin{aligned}(3+2i)*(1-i) &= (3+(-1)^2\cdot 1)+(2-1)i\\ &= (3+1)+i\\ &= 4+i\end{aligned}$$

Or, $-2+i \neq 4+i$, donc la loi $*$ n'est pas commutative.

2- Montrer que la loi $*$ est associative dans E

Corrigé :

Soient $z_1 = x+yi$, $z_2 = x'+y'i$, $z_3 = x''+y''i$.

On calcule :

$$\begin{aligned}(z_1*z_2)*z_3 &= (x+(-1)^y x'+(y+y')i)*(x''+y''i)\\ &= \Big((x+(-1)^y x')+(-1)^{y+y'}x''\Big)+(y+y'+y'')i\\ &= x+(-1)^y x'+(-1)^{y+y'}x''+(y+y'+y'')i\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}z_1*(z_2*z_3) &= (x+yi)*\Big(x'+(-1)^{y'}x''+(y'+y'')i\Big)\\ &= x+(-1)^y(x'+(-1)^{y'}x'')+(y+y'+y'')i\\ &= x+(-1)^y x'+(-1)^y(-1)^{y'}x''+(y+y'+y'')i\\ &= x+(-1)^y x'+(-1)^{y+y'}x''+(y+y'+y'')i\end{aligned}$$

Donc $*$ est associative.

3- Montrer que 0 est l'élément neutre pour $*$ dans E

Corrigé :

Soit $z = x+yi \in E$.

$$\begin{aligned}0*z &= (0+0i)*(x+yi) = (0+(-1)^0 x)+(0+y)i = x+yi = z\\ z*0 &= (x+yi)*(0+0i) = (x+(-1)^y\cdot 0)+(y+0)i = x+yi = z\end{aligned}$$

Donc 0 est élément neutre pour $*$ dans E.

4- a) Vérifier que $(x+yi)*((-1)^{y+1}x-yi)=0$

Corrigé :

On pose $z=x+yi$, $z'=(-1)^{y+1}x-yi$.

Alors :

$$\begin{aligned} z*z' &= (x+(-1)^y\cdot(-1)^{y+1}x)+(y-y)i \\ &= x+(-1)^y(-1)^{y+1}x+0i = x+(-1)^{2y+1}x = x(1+(-1)^{2y+1})=0 \end{aligned}$$

car $(-1)^{2y+1}=-1$ ($2y+1$ est impaire, donc $1-1=0$.

b) Montrer que $(E,*)$ est un groupe non commutatif

Corrigé :

i) $*$ est associative (question 2),

ii) 0 est l'élément neutre (question 3),

iii) Pour tout $z=x+yi$, on a vu que $z'=(-1)^{y+1}x-yi$ est un inverse à gauche, et de même on peut vérifier à droite.

iv) $*$ n'est pas commutative (question 1-b).

Donc $(E,*)$ est un groupe non commutatif.

Partie II

1- a) Montrer que $F=\{x+2yi \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(E,*)$

Corrigé :

i) Soit $z_1=x+2yi$, $z_2=x'+2y'i$ deux éléments de F.

$$z_1*z_2=(x+(-1)^{2y}x')+(2y+2y')i=(x+x')+2(y+y')i\in F$$

ii) $0=0+0i\in F$

iii) Si $z=x+2yi$, son inverse est $(-1)^{2y+1}x-2yi=-x-2yi\in F$

Donc F est un sous-groupe de $(E,*)$.

b) Montrer que la loi $*$ est commutative dans F

Corrigé :

Si y et y' sont pairs, alors $(-1)^y=(-1)^{y'}=1$. Donc :

$$\begin{aligned} (x+2yi)*(x'+2y'i) &= (x+x')+2(y+y')i \\ &= (x'+x)+2(y'+y)i=(x'+2y'i)*(x+2yi) \end{aligned}$$

Donc $*$ est commutative dans F.

2) Soit φ l'application définie de F vers $M_3(\mathbb{R})$ par $\varphi(x+2yi)=M(x,y)$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F,*)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

Corrigé :

Soit $z_1=x+2yi$, $z_2=x'+2y'i$.

$$\begin{aligned} z_1*z_2 &= (x+(-1)^{2y}x')+2(y+y')i=(x+x')+2(y+y')i \\ \varphi(z_1*z_2) &= M(x+x',y+y') \end{aligned}$$

Et :

$$M(x,y)\cdot M(x',y') = \begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x' & y'\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x+x' & y+y'\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc :

$$M(x,y)\cdot M(x',y') = M(x+x', y+y')$$

Donc $\varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)$, donc φ est un homomorphisme.

b) Montrer que $\varphi(F) = G$

Corrigé :
$\subseteq$: Si $z = x + 2yi \in F$, alors $\varphi(z) = M(x,y) \in G$
$\supseteq$: Tout élément de G est de la forme $M(x,y) = \varphi(x+2yi)$ avec $x + 2yi \in F$
Donc $\varphi(F) = G$.

c) En déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif
Corrigé :
$(F,*)$ est un groupe commutatif (question 1-b)
φ est un isomorphisme de $(F,*)$ sur $(G,\times)$
Donc $(G,\times)$ est un groupe commutatif.